i, amb això i noves aplicacions del teorema dels sinus, arribem a la desigualtat desitjada:

$$\begin{aligned} r(a+b)(b+c)(a+c) &\leq \\ &\leq 16R^3 r\,(\sin A + \sin B + \sin C) = \\ &= 16R^3 r\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right) = \\ &= 8R^2 r(a+b+c) = 16R^2[ABC] = \\ &= 16R^2\frac{ab\sin C}{2} = 16R^2\frac{ab\frac{c}{2R}}{2} = \\ &= 16R^2\frac{abc}{4R} = 4Rabc, \end{aligned}$$

amb igualtat si, i només si, hi ha igualtat en cadascuna de les desigualtats de Jensen establertes; això és, si, i només si, $A = B = C$, és a dir, si, i només si, el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.
2) La desigualtat $(**)$ és conseqüència immediata de la desigualtat de les mitjanes geomètrica i aritmètica $2\sqrt{xy} \leq x + y$:

$$\begin{aligned} 8abc = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 2\sqrt{ab}2\sqrt{bc}2\sqrt{ac} &\leq \\ \leq (a+b)(b+c)(a+c) \end{aligned}$$

amb igualtat si, i només si, $a = b = c$; és a dir, si, i només si, el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.

Queden, doncs, demostrades les desigualtats de l'enunciat. A més, com que

$$\frac{r}{2R} \leq \frac{1}{4}$$

és clar que

$$2r \leq R$$

amb igualtat si, i només si, el triangle $\triangle ABC$ és equilàter, que és la desigualtat d'Euler.

Notes

1. La relació $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ pels angles de qualsevol triangle $\triangle ABC$ fou establerta per l'autor com a lema 3 al número 24 de la *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática* (O. E. I.), (2006), problema 23.2, p. 16, accessible a www.oei.es/oim/revistaoim/numero24.htm.

2. La desigualtat $\frac{[DEF]}{[ABC]} \leq \frac{1}{4}$ és certa per a punts $D \in BC$, $E \in CA$ i $F \in AB$ qualssevol, sempre que les cevianes AD, BE i CF siguin concurrents en un punt. Això es prova a Bellot Rosado, Fco., «Algunas aplicaciones de la noción de área: el triángulo de Routh y los triángulos cevianos», *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática* (O. E. I.), (2004), p. 6, accessible a www.oei.es/oim/revistaoim/numero15.htm. D'altra banda, en el cas que AD, BE i CF siguin les bisectrius del triangle $\triangle ABC$, desigualtat proposada aquí, coincideix amb l'enunciat del problema 13, a la p. 8 d'aquest mateix article.

3. La desigualtat $8abc \leq (a+b)(b+c)(a+c)$ apareix al punt 1.4 del llibre de Bottema, O., *et al.*, *Geometric inequalities*, Groningen, Wolters–Noordhoff pub., 1968, i hom en proclama la validesa per a nombres reals no negatius a, b i c qualssevol. En el punt 9.8 del mateix llibre hi apareix la desigualtat $4[DEF] \leq [ABC]$, equivalent a l'altra de les proposades en aquest problema. Vegeu-ne també el punt 9.1.

4. Podeu consultar, també, el problema D.G./4 (p. 22) i la seva solució i generalització (p. 90–92) al llibre de Klamkin, Murray S., *Olimpiadas Internacionales de Matemáticas 1978–1986 y problemas suplementarios*, OREALC (UNESCO), Santiago de Xile, 1988, i el problema 2.865 de la revista *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem* (Canadian Mathematical Society) (2004), vol. 30, núm. 6, p. 375–376.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

- Gerard Fortuny Anguera va llegir la seva tesi, dirigida per Antonio Susín Sánchez, titulada *Dynamical analysis of lower abdominal wall in the human inguinal hernia*, el dia 20 de març de 2009. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona.

En aquesta tesi es construeix un simulador numèric de la paret abdominal inferior, per tal de determinar la gènesi i les causes de les hèrnies inguinals humanes. Així, un model amb dades reals d'aquesta regió del cos humà (correctament discretitzades) ens permetrà reproduir les propietats dinàmiques de diferents elements de la regió i podrem simular l'hèrnia en el moment que es produeix.

La simulació muscular en general, ha tingut un paper secundari en la simulació numèrica, ja que en ocasions sols han interessat les propietats genèriques del múscul (per això es considera el múscul com un sol element) i no en un estudi detallat de les parts del múscul. El camp on la simulació ha estat més productiva ha estat la simulació cardíaca, a causa del constant interès en la creació de models del múscul cardíac i és per aquest motiu que sols es troben models detallats en aquest cas.

La contracció de la fibra muscular va ser simulada fent servir el model reològic de Hill-Maxwell presentat per J. Bestel, en el qual es regula la contracció muscular amb una funció de potencial d'activació $u(t)$. Aquest model és el primer model dinàmic en dimensió u a escala microscòpica de la contracció muscular.

Actualment, hi ha moltes conjectures sobre les causes de les hèrnies malgrat tot, no ha estat possible un estudi detallat sobre l'origen de les hèrnies. D'una banda, és impossible captar el moment en què es genera una hèrnia, i de l'altra hi ha una carència de models prou detallats de la contracció muscular.

En aquesta tesi es presenta un estudi dinàmic de la paret abdominal inferior amb els elements actius (els músculs) i els passius (fàscies, lligaments i altres teixits), és per això que es pot dur a terme un estudi amb diferents aspectes físics i químics que intervenen en la gènesi de les hèrnies. El model reprodueix la dinàmica real de l'àrea tal com A. Keith i W. J. Lytle varen conjecturar als inicis del segle passat i que són usualment acceptats per la comunitat de cirurgians.

Aquest és el primer model que reprodueix la dinàmica real de la regió inguinal, prova l'existència de dos mecanismes de defensa (el mecanisme de persiana i el mecanisme d'esfínter a l'anell inguinal). Amb aquest model de contracció muscular podem estudiar diversos paràmetres que tenen un paper important en la gènesi de les hèrnies inguinals i podem dur a terme un estudi més detallat sobre els elements de risc. Aquests paràmetres (el mòdul de Young, el coeficient de Poisson o la pressió intraabdominal, per exemple) tenen un efecte hipotètic no provat en la gènesi de les hèrnies. Aquest treball avalua l'efecte real de diversos paràmetres al model lineal i proposa una simulació no lineal per a la simulació muscular.

- João Miguel Espiguinha Guerra va llegir la seva tesi, dirigida per José Manuel Corcuera i David Nualart, titulada *Beyond Brownian motion: topics on stochastic calculus for fractional Brownian motion and Lévy markets*, el dia 27 de març de 2009. La tesi correspon al Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística de la Universitat de Barcelona.

Aquesta tesi doctoral es divideix en dues parts. Els resultats de la primera part contribueixen al desenvolupament del càlcul estocàstic respecte del moviment Brownià fraccionari (mBf). En la segona part estudiem alguns problemes fonamentals de matemàtiques financeres en el context dels mercats de Lévy.

El mBf és un procés gaussià parametrizat per un paràmetre $H \in (0,1)$. Les aplicacions del mBf són molt nombroses i en camps tan diversos com la física, xarxes de telecomunicacions, mercats financers, entre d'altres. La primera contribució al desenvolupament del càlcul estocàstic respecte del mBf que presentem en aquesta tesi és l'estudi de les propietats de variació d'ordre p de la integral divergència (en el context del càlcul de Malliavin), al respecte del mBf. Més concretament, demostrem que la variació d'ordre $1/H$ de la integral divergència $\{\int_0^t u_s \delta B_s,\ t \in [0,T]\}$ és finita i ve donada per

$$C_H \int_0^T |u_s|^{1/H}\, \mathrm{d}s,$$

on C_H és una constant, u és un procés estocàstic dins un espai de processos adequat i B és un mBf amb paràmetre $H > 1/2$.

La segona contribució és la demostració que un procés de Bessel fraccionari R es pot representar com la solució de l'equació integral

$$R_t = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{B_s^{(i)}}{R_s} \delta B_s^{(i)} + H(d-1) \int_0^t \frac{s^{2H-1}}{R_s} \mathrm{d}s,$$

on $\{(B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})\}_{t\in[0,T]}$ és un mBf de dimensió $d \geq 2$.

En la tercera contribució presentem condicions suficients per a l'existència i unicitat de solucions per a equacions diferencials estocàstiques respecte del moviment brownià fraccionari i del moviment brownià estàndard.

En la segona part d'aquesta tesi considerem processos de Lévy per tal de definir la dinàmica estocàstica d'un actiu amb risc en un model de mercat financer (mercat de Lévy). Més concretament, el preu de l'actiu amb risc es modelitza mitjançant un procés $S = \{S_t, t \in [0,T]\}$ que satisfà l'equació diferencial estocàstica

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_{t-}} = \mathrm{d}Z_t,$$

on Z és un procés de Lévy. En general, el mercat de Lévy és un mercat incomplet. No obstant això, aplicant la fórmula de representació previsible per a processos de Lévy (fórmula de Nualart-Schoutens), és possible completar el mercat utilitzant un conjunt (finit o numerable) d'actius artificials relacionats amb les potències dels salts del procés de Lévy. La introducció d'aquests actius ens permet resoldre el problema d'optimització de carteres en mercats de Lévy i deduir fórmules de cobertura de carteres per a aquests mercats. Posteriorment, aplicant una fórmula de cobertura estàtica, representem els actius artificials mitjançant una combinació d'opcions «call» (opcions europees de dret de compra) i obtenim fórmules de cobertura de carteres en termes d'aquestes opcions.

- Noèlia Viles i Cuadros va llegir la seva tesi, dirigida per Maria Jolis i Giménez, titulada *Continuïtat en llei respecte al paràmetre de Hurst d'alguns funcionals del moviment brownià fraccionari*, el dia 8 juliol de 2009. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

En els darrers anys s'ha produït un increment extraordinari de l'interès pel moviment brownià fraccionari. Aquest procés gaussià fou introduït per Kolmogorov el 1940 i estudiat més detalladament per Mandelbrot i Van Ness el 1968. S'ha utilitzat en la modelització de determinats fenòmens en diferents camps, que van des de la física, l'enginyeria o la hidrologia fins a la biologia i l'economia, entre d'altres. Això es deu, bàsicament, a la necessitat de disposar d'un procés gaussià autosimilar amb increments dependents a llarg termini.

Aquesta família de processos depèn d'un paràmetre H, anomenat *paràmetre de Hurst*, que pren valors a l'interval $(0,1)$. Quan $H = \frac{1}{2}$, tenim el conegut moviment brownià ordinari i és una semimartingala. Tret d'aquest cas excepcional, però, per a la resta de valors del paràmetre H el moviment brownià fraccionari no és una semimartingala. A més, si H és més gran o bé més petit que $\frac{1}{2}$, aquest procés presenta propietats molt diferents. Així, doncs, tenim que si $H > \frac{1}{2}$, té trajectòries més regulars que les del moviment brownià ordinari, mentre que si $H < \frac{1}{2}$, aquestes són més irregulars.

Entre els temes que han rebut més atenció en els darrers anys hi ha la construcció d'una anàlisi estocàstica associada a aquest tipus de processos que necessita idees diferents de les usades en l'anàlisi estocàstica ordinària, ja que, com hem dit, els moviments brownians fraccionaris no són semimartingales per a cap valor del paràmetre $H \neq \frac{1}{2}$.

S'han estudiat diversos funcionals respecte d'aquest procés, com per exemple: diferents tipus d'integrals estocàstiques i el temps local. La importància d'aquest últim pel fet que permet mesurar el temps que passa una trajectòria d'un procés estocàstic al voltant d'un punt.

Un dels conceptes fonamentals de la teoria de la probabilitat és la convergència en llei. El teorema central del límit és, sens dubte, l'exemple més important d'aquest tipus de convergència.

Una propietat senzilla de comprovar és que

la família de moviments brownians fraccionaris convergeix en llei, com a processos continus, quan H s'acosta a H_0.

Tenint en compte aquest resultat, l'objectiu de la tesi és estudiar si alguns funcionals del moviment brownià fraccionari conserven aquesta propietat. És a dir, ens preguntem si la seva llei (en l'espai de les funcions contínues en $[0, T]$) es manté a prop del funcional corresponent per B^{H_0}, quan H tendeix a H_0.

En aquest treball hem trobat les condicions més generals possibles per assegurar la convergència en llei dels funcionals següents: les integrals mútiples tipus Itô i tipus Stratonovich de funcions deterministes, la integral simètrica tipus Russo-Vallois de processos estocàstics no adaptats i el temps local.

La major part dels resultats obtinguts per al temps local s'han inspirat en els diversos articles dels anys setanta de S. Berman, però hi ha una part, dedicada a la identificació del límit, per a la qual hem hagut de desenvolupar noves tècniques.

Precisament, usant aquestes tècniques, W. Donghseng i Y. Xiao al 2009 generalitzen el nostre resultat sobre continuïtat en llei a una classe més àmplia de processos (camps aleatoris anisòtrops que compleixen certes condicions de no-determinisme local i sectorial).

Un dels problemes, relacionat amb els anteriors, és la definició de les integrals estocàstiques respecte al moviment brownià fraccionari. Sovint és força complicat trobar un espai prou ampli d'integrants i, més encara, determinar explícitament el domini de les integrals. Aquest fet implica que s'hagin d'imposar certes condicions de regularitat als integrants. Per exemple, per a l'integral múltiple tipus Stratonovich de funcions deterministes respecte al moviment brownià fraccionari ens hem restringit al cas $H > \frac{1}{2}$, ja que d'aquesta manera es pot definir la integral per a un espai de Banach de funcions de quadrat integrable respecte a una certa mesura definida a partir de la covariància.

La importància dels resultats obtinguts i la motivació d'aquest treball rauen en el fet que justifiquen d'alguna manera l'ús, com a model, d'un moviment brownià fraccionari $B^{\hat{H}}$, on $\hat{H}$ és l'estimació del valor real del paràmetre de Hurst H, ja que a la pràctica aquest valor és desconegut.